PREMESSA

Quella che segue è un'analisi del paradosso dei gemelli condotta utilizzando come unico strumento le trasformazioni di Lorentz e le formule immediatamente ricavabili da esse.

È necessario che il lettore abbia qualche dimestichezza con le stesse e con i concetti di tempo e di spazio ad esse legati, in particolare con la relatività della simultaneità, e sappia comporre relativisticamente due velocità dirette lungo l'asse x.

Gli strumenti matematici richiesti si limitano al calcolo algebrico.

Consiglio a chi legge, se non particolarmente in confidenza con l'argomento, di calcolare almeno alcuni dei dati presenti nella tabella che si incontra nelle pagine che seguono, a partire da quelli fissati definendo i singoli eventi.

In questo modo potrà vedere emergere le simultaneità tra eventi, diverse secondo i diversi osservatori, sulle quali la discussione è basata; e osservare come uno stesso evento possa apparire futuro a un osservatore e passato a un altro che si trovi nella stessa posizione ma con diversa velocità.

Aggiungo che, nonostante ciò che si legge su qualche testo, anche scolastico, laddove si afferma che per la risoluzione del paradosso è necessario l'uso della Relatività Generale, qui tutto rimane all'interno della Relatività Ristretta, in quanto i cambiamenti di velocità si verificano in un tempo nullo o comunque abbastanza piccolo da potersi ritenere trascurabile rispetto alla durata dell'esperimento.

LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

Nel seguito useremo come unità di misura l'anno per il tempo, l'anno luce a.l. per lo spazio, il rapporto a.l./anno per la velocità. Con questa scelta la velocità della luce c è uguale a 1 a.l./anno e le trasformazioni di Lorentz per t e x e le loro inverse si scrivono:

$$t' = \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}} \qquad x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \qquad 1$$

$$t = \frac{t'+vx'}{\sqrt{1-v^2}} \qquad x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2}} \qquad 2$$

Osserviamo che le 2 sono formalmente identiche alle 1 e si ottengono da esse scambiando le quantità accentate con quelle non accentate e v con la velocità opposta –v.

La formula per la composizione di due velocità dirette lungo l'asse x diventa:

$$u \otimes v = \frac{u+v}{1+uv} \qquad 3$$

Dove u è la velocità di un punto materiale P rispetto ad un sistema di riferimento inerziale S', v è la velocità di S' rispetto ad un altro sistema inerziale S e $u \otimes v$ è la velocità dello stesso punto P rispetto ad S.

Dalle 1 è possibile ricavare la relazione tra l'intervallo di tempo Δt che intercorre tra due eventi P e Q separati da una distanza Δx nel sistema inerziale S e l'intervallo di tempo Δt' che intercorre tra gli stessi due eventi in un sistema inerziale S' in moto rispetto ad S con velocità $v = \Delta x/\Delta t$ così che in S' P e Q si verifichino nello stesso punto. Per fissare le idee P potrebbe essere l'accensione di una luce da parte di un osservatore in quiete in S', Q lo spegnimento della stessa dopo aver percorso, rispetto ad S, lo spazio Δx nel tempo Δt.

Quindi P si verifica nel punto di ascissa x al tempo t, Q nel punto di ascissa $x + \Delta x$ al tempo $t + \Delta t$

Calcoliamo i corrispondenti istanti in cui i due eventi si verificano secondo gli osservatori di S':

$$t'(P) = \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}} \qquad 4$$

$$t'(Q) = \frac{t+\Delta t-v(x+\Delta x)}{\sqrt{1-v^2}} \qquad 5$$

da cui $\Delta t' = t'(Q) - t'(P) = \frac{\Delta t - v\Delta x}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\Delta t - v^2\Delta t}{\sqrt{1-v^2}} = \Delta t\sqrt{1-v^2}$

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-v^2} \qquad 6$$

Per ottenere la formula analoga per Δt è sufficiente scambiare t con t' e v con –v :

$$\Delta t = \Delta t'\sqrt{1-v^2} \qquad 7$$

Osserviamo che la 7 non è l'inversa della 6 in senso algebrico. Infatti se volessimo, nella 6, calcolare Δt otterremmo:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2}}$$

Questo perché, se ammettiamo che le due formule siano riferite a uno stesso intervallo di tempo Δt, i due intervalli Δt' saranno diversi. Se così non fosse, tra l'altro, esse sarebbero compatibili soltanto per v=0.

Per comprendere quali siano esattamente gli intervalli di tempo presenti nelle due formule ricaveremo ora la 7 direttamente dalle 1.

Allo scopo consideriamo un ulteriore evento R, simultaneo di Q nel sistema di riferimento S, che si verifichi quindi al tempo $t + \Delta t$, ma nel punto di ascissa x, cioè nello stesso punto in cui al tempo t si era verificato P.

Calcoliamo anche per R l'istante t'(R) in cui si verifica secondo gli osservatori di S':

$$t'(R) = \frac{t+\Delta \mathrm{t}-vx}{\sqrt{1-v^2}} \qquad 8$$

L'intervallo di tempo Δt' intercorso tra P e R sarà:

$$\Delta t' = t'\,(R) - t'\,(P) = \frac{t+\Delta \mathrm{t}-vx}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\Delta \mathrm{t}}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta \mathrm{t}}{\sqrt{1-v^2}}$$

ossia

$$\Delta t = \Delta t'\sqrt{1-v^2} \qquad 7$$

che è di nuovo la 7.

Quindi il Δt' della 6 e il Δt' della 7 sono intervalli di tempo riferiti a due diverse coppie di eventi, P e Q nel primo caso, P e R nel secondo e, nell'ipotesi che l'intervallo Δt sia lo stesso nelle due formule, i due Δt' sono uno minore di Δt, l'altro maggiore e tali che $(\Delta t')_6 \times (\Delta t')_7 = (\Delta t)^2$.

IL PARADOSSO DEI GEMELLI

Il paradosso dei gemelli fu formulato da Einstein; egli osservò che un essere vivente che parta da un certo luogo e viaggi poi per un certo tempo a velocità prossima a quella della luce, una volta tornato indietro si ritroverà più giovane di un suo coetaneo rimasto lì in quiete.

Il paradosso consisterebbe nel fatto che soltanto il gemello viaggiante si ritrova ad essere più giovane di quello rimasto a casa, mentre, in base alle 6 e 7, per tutta la durata del viaggio, ciascuno dei due vede l'orologio dell'altro battere il tempo con ritmo inferiore a quello del proprio e in base a questo potrebbe, così almeno sembra, affermare di essere invecchiato di più.

Vedremo in seguito invece che, fin che i due gemelli si allontanano, le loro previsioni, ancorchè apparentemente contraddittorie, sono entrambe vere, ma una sola delle due potrà essere verificata; quale dipenderà dal modo in cui decideranno di tornare ad incontrarsi.

Per la discussione del paradosso immagineremo che vengano eseguiti degli esperimenti, durante i quali si succedono alcuni eventi.

Si tratta ovviamente di esperimenti mentali, non essendo nemmeno immaginabile che oggetti macroscopici possano essere accelerati a velocità relativistiche.

Protagonisti sono due gemelli, Aldo e Marco.

Useremo quattro sistemi di riferimento inerziali. Per fissare le idee possiamo pensare a uno di essi, S, come a un marciapiede rettilineo di lunghezza indefinita, e agli altri come a dei treni, o dei tappeti mobili, anch'essi di lunghezza indefinita, che corrono parallelamente a S.

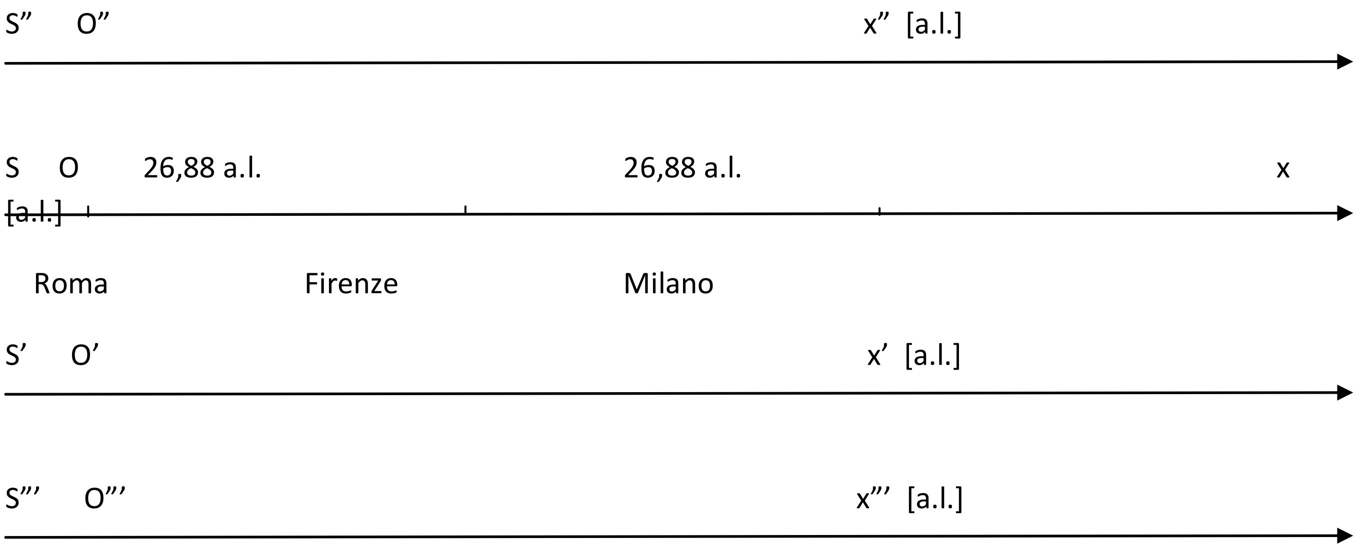
Le velocità dei tre sistemi, riferite a S, sono:

v(S') = 0,96 a.l./anno

v(S'') = -0,96 a.l./anno

v(S''') = $\frac{1200}{1201}\ a.l./anno$

Al tempo t=0 le origini dei quattro sistemi di riferimento coincidono e, soltanto in quel punto, si ha anche t=t’=t”=t”’= 0



Il sistema S”’ riguarda un secondo esperimento, che sarà introdotto in seguito per completare l’esame della relazione temporale tra i due gemelli.

Tre città, che chiameremo Roma, Firenze e Milano si trovano in quiete nel sistema inerziale S, al quale viene anche riferito il moto degli altri sistemi di riferimento inerziali utilizzati.

La distanza in anni luce tra le prime due città è di 26,88 a.l. e così anche quella tra la seconda e la terza.

Naturalmente, se lo preferisce, ciascuno è libero di pensare ad astronavi e stelle invece che a treni e città.
Qui di seguito elenchiamo gli eventi che prenderemo in considerazione per discutere il paradosso.

A) Aldo e Marco nascono a Roma al tempo t=0. Marco viene immediatamente trasferito sul sistema inerziale S’.
B) Aldo a Roma ha esattamente 2,1952 anni.
   Nel secondo esperimento Aldo sale su S”’ e insegue Marco.
C) Aldo, rimasto a Roma, compie 28 anni. Solo nel 1° esperimento.
D) Marco, a Firenze, al tempo t=28 anni, passa istantaneamente dal sistema S’ al sistema S”. Solo nel 1° esperimento.
E) Marco, al tempo t=56 anni, a Roma, passa dal sistema S” al sistema S e ritrova il gemello Aldo. I due confrontano le rispettive età.
   Solo nel 1° esperimento.
F) Aldo a Roma ha l’età di 53,8048 anni. Solo nel 1° esperimento.
G) Aldo e Marco si incontrano a Milano. Solo nel 2° esperimento.

Nella seguente tabella sono riportate tutte o alcune delle coordinate spaziali (x x’ x” in anni luce) e temporali (t t’ t” in anni) degli eventi descritti in precedenza.

	t S x		t’ S’ x’		t” S” x”		Luogo	t”’	x”’
A	0	0	0	0	0	0	Roma	0	0
B	2,1952	0	7,84	-7,5264			Roma	53,8048	-53,76
C	28	0	100	-96	100	96	Roma		
D	28	26,88	7,84	0	192,16	192	Firenze		
E	56	0	200	-192	200	192	Roma		
F	53,8048	0			192,16	184,4736	Roma		
G	56	53,76	15,68	0			Milano	56	-53,76

Qui ci limitiamo a riportare il calcolo delle coordinate dell’evento D nei sistemi accentati:

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{28 - 0{,}96 \times 2\ 6{,}88}{\sqrt{1 - 0{,}96^2}} = \frac{2{,}1952}{0{,}28} = 7{,}84\ anni$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{26{,}88 - 0{,}96 \times 28}{0{,}28} = 0\ \ a.l.$$

$$t" = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{28 - (-0{,}96) \times 26{,}88}{\sqrt{1 - 0{,}96^2}} = \frac{53{,}8048}{0{,}28} = 192{,}16\ anni$$

$$x" = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{26{,}88 - (-0{,}96 \times 28)}{0{,}28} = \frac{53{,}76}{0{,}28} = 192\ a.l.$$

In modo analogo si calcolano le coordinate degli altri eventi.

Passiamo ora alla discussione dei risultati.

CONFRONTO DELLE ETÀ DI ALDO e MARCO AL RITORNO DI QUEST’ULTIMO A ROMA

Calcoliamo le età di Aldo e Marco a Roma in coincidenza con l’evento E.

Età di Aldo = 56 anni.

Età di Marco = t’(D) – t’(A) + t”(E) – t”(D) =

7,84 – 0 + 200 – 192,16 = 7,84 + 7,84 = 15,68 anni

Marco è più giovane di Aldo, del quale era coetaneo alla nascita.

CONFRONTO DELLE ETÀ DI ALDO E MARCO AL PASSAGGIO DI QUEST'ULTIMO PER FIRENZE

Secondo Aldo, in quiete in S, gli eventi C e D sono simultanei, ovvero quando lui accende le candeline a Roma Marco passa da S' a S" a Firenze, quindi le età sono:

Età di Aldo = t(C) – t(A) = 28 – 0 = 28 anni

Età di Marco = t'(D) – t'(A) = 7,84 – 0 = 7,84 anni

Secondo Marco, in quiete in S', quando egli passa da S' a S" a Firenze, a Roma si sta verificando l'evento B, perché, come si legge nella tabella, t'(D) = t'(B).

Quindi, sempre secondo Marco, a Roma Aldo ha poco più di due anni, e ovviamente non è affatto il suo ventottesimo compleanno. Si osservi come l'uso dell'avverbio di tempo "quando", e in genere di tutti gli avverbi di tempo, debba assolutamente essere riferito all'osservatore che lo sta utilizzando.

Le età secondo il punto di vista di Marco, e di tutti gli osservatori in quiete in S', sono quindi:

Età di Marco = t'(D) – t'(A) = 7,84 – 0 = 7,84 anni

Età di Aldo = t(B) – t(A) = 2,1952 – 0 = 2,1952 anni

Secondo Marco, quindi, è Aldo ad essere rimasto più giovane di lui.

Si osservi che, se Marco fosse nato a Roma al tempo t=t'=0, non nel sistema S ma nel sistema S', non sarebbe cambiato assolutamente nulla, e quindi egli, per questa prima metà del viaggio, è un osservatore inerziale come il fratello.

Fin qui la situazione è simmetrica, nel senso che ciascuno dei due gemelli, assumendo il proprio punto di vista di osservatore inerziale sulla simultaneità degli eventi, può ritenere di essere invecchiato più dell'altro.

Osserviamo però che i due punti di vista non sono in contraddizione: infatti Aldo all'età di 28 anni ritiene di avere più anni di Marco all'età di 7,84 anni mentre quest'ultimo, sempre all'età di 7,84 anni, ritiene di avere più anni di Aldo all'età di 2,1952 anni.

Entrambe le affermazioni sono vere, anzi, ciascuno dei due può eseguire i calcoli fin qui fatti da noi ed essere del tutto d'accordo con l'altro.

Come si vede finora non esiste alcun paradosso.

Calcoliamo ora la durata della seconda parte del viaggio di Marco secondo gli osservatori in quiete in S:

Durata del viaggio di Marco su S" =

=t"(E)-t"(D)=200-192,16 = 7,84 anni

L’età di Aldo nel frattempo, secondo S, aumenta di:

incremento dell’età di Aldo = t(E) - t(C) = 56 – 28 = 28 anni.

Calcoliamo gli incrementi di tempo dal punto di vista di S”

Cerchiamo l’evento simultaneo di D a Roma secondo S”, per il quale sarà x=0 e t” = 192,16 anni

$$x" = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{0 + 0{,}96t}{\sqrt{1 - 0{,}96^2}} = \frac{0{,}96t}{0{,}28} = \frac{24}{7}t$$

$$t = \frac{t" + vx"}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{192{,}16 + (-0{,}96) * \frac{24}{7}t}{0{,}28}$$

$$0{,}28t = 192{,}16 - \frac{23{,}04}{7}t$$

Da cui si ricavano i valori:

$$t = 53{,}8048 \ anni \quad e \qquad x" = 184{,}4736 \quad a.l.$$

Chiamiamo F questo evento.

Marco calcola il tempo trascorso a Roma mentre secondo S” si svolge il viaggio Firenze Roma

t(E) – t(F) = 56 – 53,8048 = 2,1952 anni

Il tempo trascorso da Marco su S” è infine:

t”(E) - t”(D) = 200 – 192,16 = 7,84 anni

Il rapporto tra i due incrementi di tempo secondo S è $\frac{7{,}84}{28}$

Quello tra i due incrementi secondo S” è $\frac{7{,}84}{2{,}1952}$

Possiamo verificare immediatamente che i due rapporti sono uno l’inverso dell’altro, infatti:

$$\frac{7{,}84}{28} * \frac{7{,}84}{2{,}1952} = \frac{61{,}4656}{61{,}4656} = 1$$

Anche in questo caso troviamo che vi è simmetria tra le previsioni dei due gemelli.

Viene dunque spontaneo chiedersi come mai alla fine l’esperimento confermi il punto di vista degli osservatori di S e non quello del gemello in viaggio prima su S’ e poi su S”.

Questa domanda nasce dall'idea, errata, che Marco possa calcolare l'età di Aldo sommando i due intervalli di tempo, pari ciascuno a 2,1952 anni, che secondo il suo punto di vista trascorrono a Roma "mentre" egli stesso viaggia da Roma a Firenze su S' e poi "mentre" ritorna da Firenze a Roma su S".

In verità Marco sa benissimo che l'età di Aldo è pari a t(E) – t(A) = 56 anni. Il problema tutt'alpiù è capire perché l'altro modo di calcolarla sia errato, ed è presto fatto.

Quando Marco giunge a Firenze al tempo t' = 7,84 anni l'evento suo simultaneo a Roma è il B, caratterizzato da t=2,1952 anni e t'=7,84 anni.

Dunque egli ritiene che Aldo debba ancora vivere la maggior parte della sua vita.

Immediatamente dopo si ritrova su S", ha cambiato velocità, e il suo simultaneo a Roma è l'evento F. All'improvviso deve cambiare opinione e riconoscere che Aldo non ha 2,1952 anni ma 53,8048.

Tutti gli eventi verificatisi a Roma tra questi due istanti si sono spostati per Marco dal futuro al passato.

Ma c'è di più. Supponiamo che il passaggio dal sistema S' al sistema S" sia avvenuto non istantaneamente, ma per gradi, in un tempo breve rispetto alla durata dell'esperimento ma non nullo.

Per fissare le idee diciamo che Marco abbia impiegato un'ora, ovvero 3600 secondi, per passare da v=0,96 a.l./anno a v=-0,96 a.l./anno accelerando in ciascuno dei 1800 secondi di posto dispari e muovendosi a velocità costante in ciascuno dei 1800 secondi di posto pari.

Durante ciascuno di questi ultimi si sarà trovato in quiete in un diverso sistema di riferimento inerziale.

In particolare, a un certo punto, per un secondo, sarà stato in quiete in S e il suo evento simultaneo a Roma sarà stato il 28° compleanno di Aldo. Così ogni volta che per un secondo si è trovato in quiete in un diverso sistema inerziale ha avuto come simultaneo un diverso evento a Roma, passando gradualmente da t=2,1952 a.l. a t=53,8048 a.l.

In appendice riportiamo la dimostrazione di questa affermazione.

Dunque Marco, come in un film, ha visto scorrere in un'ora la parte della vita di Aldo che va da 2,1952 a 53,8048 a.l.

Possiamo dire che mentre per Marco è passata un'ora per il suo gemello a Roma sono passati circa 50 anni? Evidentemente no.

Altrimenti, se nell'ora successiva Marco fosse ritornato con le stesse modalità dal sistema S" al sistema S', mentre per lui sarebbe passata un'ora, per il gemello a Roma sarebbero passati circa 50 anni, stavolta però a ritroso; e così continuando se Marco avesse deciso di fare la spola tra S’ ed S”, il che è manifestamente assurdo.

Osserviamo comunque che queste considerazioni sulla simultaneità dei propri eventi con quelli di Roma consentono a Marco di capire che alla fine del viaggio incontrerà Aldo di 56 anni e non di poco più di 4.

Il paradosso quindi non sorge perché la previsione di Marco coincide con quella di Aldo.

Resta da capire se sia possibile modificare l’esperimento in modo che a incontrarsi alla fine siano Marco di 15,68 anni e Aldo di 4,3904 anni. La risposta è affermativa: è sufficiente che Aldo, all’età di 2,1952 anni, parta all’inseguimento di Marco con una velocità che, misurata nel sistema S’, sia di 0,96 a.l./anno.

Infatti Marco ha visto Aldo viaggiare per 7,84 anni alla velocità di

-0,96 a.l. Un ugual tempo di viaggio con velocità opposta lo riporterà al punto di partenza, che per gli osservatori di S’ è O’, l’origine del sistema in cui essi sono in quiete.

A quel punto le età di Aldo e di Marco saranno rispettivamente di 4,3904 anni e 15,68 anni. Stavolta a invecchiare di più sarà stato Marco.

Come si vede le due previsioni, essendo entrambe corrette, ma diverse, possono sì essere verificate sperimentalmente, ma con due esperimenti distinti.

È infatti evidente che se un esperimento è progettato in modo tale che alla fine Marco si incontri col suo gemello di 56 anni non potrà certo incontrarsi con lo stesso gemello ancora bambino.

Chiediamoci infine a quale velocità Aldo debba viaggiare rispetto ad S per raggiungere Marco quando questi avrà 15,68 anni e dove lo raggiungerà.

Abbiamo detto che gli osservatori di S’ dovranno vedere Aldo viaggiare alla velocità di 0,96 a.l./anno e che con la stessa velocità S’ viaggia rispetto ad S. Quindi la velocità di Aldo rispetto ad S sarà:

$$0{,}96 \otimes 0{,}96 = \frac{0{,}96 \times 2}{1+0{,}96^2} = \frac{1200}{1201} \text{ a.l./anno}$$

Essendo obiettivo dell’esperimento che Aldo raggiunga Marco quando questi avrà l’età di 15,68 anni, osserviamo che ciò si verificherà a Milano al tempo t=56 anni. Si tratta dell’evento G della tabella.

Verifichiamo se ciò sia compatibile col valore appena calcolato per la velocità di Aldo.

Secondo gli osservatori di S egli viaggerà per un tempo

t = 56 – 2,1952 = 53,8048 anni

e percorrerà una distanza

d= $\frac{1200}{1201} \cdot 53{,}8048 = 53{,}76\ a.l.$

che è proprio la distanza tra Roma e Milano (26,88 × 2).

Ci rimane infine da calcolare l'età di Aldo in corrispondenza dell'evento G, cioè quando raggiunge Marco a Milano. Nella tabella troviamo le coordinate degli eventi A, B, G.

Età di Aldo a Milano = t"' (G) – t"' (B) + t (B) – t (A) =

56 – 53,8048 + 2,1952 – 0 = 4,3904 anni

Abbiamo così dimostrato che il paradosso dei gemelli, inteso in termini logici, semplicemente non esiste, anche se ovviamente la situazione resta paradossale, dando al termine il significato di "oltremodo strana", secondo il senso comune.

APPENDICE

Consideriamo un generico osservatore inerziale S_k che si muova con velocità kv (nel nostro caso 0,96k) con $-1 \leq k \leq 1$ e si trovi a transitare per Firenze in coincidenza con il passaggio, e il rapido cambio di velocità, di Marco.

Qui supporremo che il passaggio di Marco da S' a S" avvenga in un tempo nullo, o comunque tanto breve da poterlo trattare come parte di un unico evento, quello che abbiamo chiamato D.

Qual è il tempo misurato dall'orologio di S_k per tale evento?

$$t_k(D) = \frac{t(D)-kv\cdot vt(D)}{\sqrt{1-k^2v^2}} = \frac{t(D)(1-kv^2)}{\sqrt{1-k^2v^2}} \qquad \text{A1}$$

Mentre la posizione dell'evento D nel sistema S_k è:

$$x_k\,(D) = \frac{x(D)-kvt(D)}{\sqrt{1-k^2v^2}} = \frac{vt(D)-kvt(D)}{\sqrt{1-k^2v^2}} = \frac{vt(D)(1-k)}{\sqrt{1-k^2v^2}} \qquad \text{A2}$$

Consideriamo ora l'evento P_k che si verifica a Roma all'istante $t_k(P_k)= t_k(D)$ ed è quindi simultaneo di D secondo l'osservatore S_k . Vogliamo calcolarne la coordinata temporale t secondo S.

Sappiamo che

$$\mathrm{t_k}\,(\mathrm{P_k}) = \ \mathrm{t_k}\,(\mathrm{D}) = \frac{t(D)\left(1-kv^2\right)}{\sqrt{1-k^2v^2}} \qquad \text{A1}$$

e che

$$x(P_k) = 0$$

in quanto P_k si verifica a Roma, cioè nell'origine del sistema S.

Nel sistema S_k Roma è in moto con velocità –kv, per cui:

$$t(P_k) = \frac{t_k(P_k)+kvx_k(P_k)}{\sqrt{1-k^2v^2}} \qquad \text{A2}$$

$$x_k(P_k) = \frac{x(P_k)-kvt(P_k)}{\sqrt{1-k^2v^2}} = \frac{-kvt(P_k)}{\sqrt{1-k^2v^2}} \qquad \text{A3}$$

Sostituendo A1 e A3 in A2 si ottiene:

$$t(P_k) = \frac{\frac{t(D)\left(1-kv^2\right)}{\sqrt{1-k^2v^2}}+kv\frac{-kvt(P_k)}{\sqrt{1-k^2v^2}}}{\sqrt{1-k^2v^2}}$$

$$t(P_k) = \frac{t(D)(1 - kv^2) - k^2v^2t(P_k)}{1 - k^2v^2}$$

$$t(P_k) - k^2v^2t(P_k) = t(D)(1 - kv^2) - k^2v^2t(P_k)$$

e infine

$$t(P_k) = t(D)(1 - kv^2) \qquad \text{A4}$$

Si vede immediatamente che, fissati t e v, $t(P_k)$ è una funzione decrescente di k, che è quanto volevamo dimostrare.